Лемма Пусть $F(x,y)=\int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta)d\xi d\eta$. Если f— непрерывна, то

$$\tfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)=f(x,y).$$

Вопрос: На какой класс функций f обобщается эта лемма? Почему не достаточно непрерывности в точке?

Пусть $p_1,\ p_2,\ \ldots$— произвольная последовательность вещественных чисел. Фиксируем $n\geqslant 2$. Требуем $(1,\ldots,1)\not\parallel(p_1,\ldots,p_n)$. В $\mathbb{R}^n$ рассмотрим фигуру:

$$\begin{cases} x_1+\cdots+x_n\leqslant A,\\ p_1x_1+\cdots+p_nx_n\leqslant B,\\ x_k\geqslant 0, \qquad \text{для всех } k. \end{cases}$$

Обозначим через $V_{n,\boldsymbol{p}}(A,B)$ — ее n-мерный объём.

$$F_{n,\boldsymbol{p}}(A,B)=\tfrac{\partial^2}{\partial A\partial B}V_{n,\boldsymbol{p}}(A,B).$$

Геометрический смысл: — По теореме Фубини это с точностью до коэффициента $n-2$ мерный лебегов объем соответсвующего множества.
Утверждение 1. $F_{n,\boldsymbol{p}}(A,B)=A^{n-2}F_{n,\boldsymbol{p}}(1,\frac{B}{A})$.
Утверждение 2. Функция $x\mapsto F_{n,\boldsymbol{p}}(1,x)$ — неотрицательная, с носителем на $[\min_{k=1..n}p_k\,,\ \max_{k=1..n}p_k]$ и $\int_0^\infty F_{n,\boldsymbol{p}}(1,x)dx=\frac{1}{(n-1)!}$.

Пусть $n_q=\#\big\{k\in\{1,\ldots,n\}:p_k=q\big\}$. Тогда $\sum_q n_q=n$.
Что бы помочь читателю понять формулу в следующей теореме мы отметим тождество:

$$\prod_{\substack{j=1,\ldots,n\\ p_j\neq q}}(p_j-\xi)=\prod_{q'\in\{p_1,\ldots,p_n\}\setminus q}(q'-\xi)^{n_{q'}} \quad (\text{здесь по } n-n_q \text{ множителей}).$$

Обозначение. $(\cdot)_+^m$ обозначает функцию: $(x)_+^m=\begin{cases} x^m,\ x\geqslant 0,\\ \ \,0,\ x<0.\end{cases}$

Теорема. *Для функции* $F_{n,\boldsymbol{p}}(1,\cdot)$ *справедливо тождество:*

$$F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c)=\frac{1}{(n-2)!}\sum_{q\in\{p_k\}_{k=1}^n}\frac{(-1)^{n_q-1}}{(n_q-1)!}\frac{d^{n_q-1}}{d\xi^{n_q-1}}\left(\frac{\big((c-\xi)_+\big)^{n-2}}{\prod\limits_{\substack{j=1,\ldots,n\\ p_j\neq q}}(p_j-\xi)}\right)\Bigg|_{\xi=q}, \qquad (1)$$

или, что эквивалентно:

$$F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c)=\frac{1}{(n-2)!}\sum_{\substack{q\in\{p_k\}_{k=1}^n\\ q<c}}\frac{(-1)^{n_q-1}}{(n_q-1)!}\frac{d^{n_q-1}}{d\xi^{n_q-1}}\left(\frac{(c-\xi)^{n-2}}{\prod\limits_{\substack{j=1,\ldots,n\\ p_j\neq q}}(p_j-\xi)}\right)\Bigg|_{\xi=q}. \qquad (1')$$

Доказательство. В частном случае, когда все кратности равны 1 нам надо доказать формулу

$$F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c) = \frac{1}{(n-2)!}\sum_{k=1}^{n} \frac{\big((c-p_k)_+\big)^{n-2}}{\prod\limits_{\substack{j=1,\dots,n\\ j\neq k}} (p_j - p_k)}\,. \tag{2}$$

Этим случаем можно и ограничится, т.к. случай "кратностей" в последовательности $\{p_k\}$ можно получить предельным переходом, используя формулу:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{s=0}^{l-1}(-1)^s\varepsilon^{1-l}\frac{\varphi(x+s\varepsilon)}{s!(l-s-1)!} = \frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!}\varphi^{(l-1)}(x). \tag{3}$$

Доказательство формулы (2) основано на использовании геометрического смысла величины $F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c)$. $\square$

Обозначение. Если $\boldsymbol{p} = (p_1,\dots,p_n)$ — вектор размерности n, то $\boldsymbol{p}'_m$ — вектор размерности $n-1$, полученный "выкидыванием" p_m.
Обозначение. Для $x\in[0,1)$ положим:

$$\varrho_{c,n,m}(x) = \frac{F_{n-1,\boldsymbol{p}'_m}(1-x, c-p_m x)}{F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c)} = \frac{(1-x)^{n-3}F_{n-1,\boldsymbol{p}'_m}(1,\frac{c-p_m x}{1-x})}{F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c)}. \tag{4}$$

Для $x\notin[0,1)$ положим $\varrho_{c,n,m}(x)=0$.
Утверждение 2. $\displaystyle\int_0^1 \varrho_{c,n,m}(x)dx = 1.$
Следствие.

1° $\varrho_{p_m,n,m}(x) = (n-2)(1-x)^{(n-3)}$, $\qquad 2^\circ$ $\displaystyle\int_0^1 x^i\varrho_{p_m,n,m}(x)dx = \frac{i!(n-2)!}{(i+n-2)!}.$

Вычисление 1. *Пусть в последовательности* $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ *значение* p_1 *является минимальным и отделенным от всех остальных значений последовательности. То есть, существует* $\sigma > p_1$ *т.ч.* $\forall\ k\geqslant 2$ *выполнено* $\sigma\leqslant p_k$. *Тогда при* $p_1\leqslant c\leqslant\sigma$, $m\geqslant 2$ *и* $m\leqslant n$ *выполнено:*

$$\int_0^\infty x^i\varrho_{c,n,m}(x)dx = \left(\frac{c-p_1}{p_m-p_1}\right)^i\frac{i!(n-2)!}{(i+n-2)!}.$$

Решение. Пусть $p_1\leqslant c\leqslant\sigma$, $m\geqslant 2$, $m\leqslant n$, $x\geqslant 0$. Тогда:

$$\varrho_{c,n,m}(x) = \frac{F_{n-1,\boldsymbol{p}'_m}(1-x, c-p_m x)}{F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c)} = \frac{(1-x)^{n-3}F_{n-1,\boldsymbol{p}'_m}(1,\frac{c-p_m x}{1-x})}{F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\frac{(1-x)^{n-3}}{(n-3)!}\frac{\left(\frac{c-p_m x}{1-x}-p_1\right)^{(n-3)}}{\prod_{j=2,\, j\neq m}^{n}(p_j-p_1)}}{\frac{1}{(n-2)!}\frac{(c-p_1)^{n-2}}{\prod_{j=2}^n(p_j-p_1)}} \\ 0,\ \text{при } x>(c-p_1)/(p_m-p_1)\end{cases} = \begin{cases}(n-2)\left(1-\dfrac{p_m-p_1}{c-p_1}x\right)^{n-3}\dfrac{p_m-p_1}{c-p_1} \\ 0,\ \text{при } x>(c-p_1)/(p_m-p_1)\end{cases}$$

$$\int_0^\infty x^i \varrho_{c,n,m}(x)dx = \int_0^{\frac{c-p_1}{p_m-p_1}} x^i(n-2)\left(1-\frac{p_m-p_1}{c-p_1}x\right)^{n-3}\frac{p_m-p_1}{c-p_1}dx =$$

$$(n-2)\left(\frac{c-p_1}{p_m-p_1}\right)^i\int_0^1 z^i(1-z)^{n-3}dz = (n-2)\left(\frac{c-p_1}{p_m-p_1}\right)^i\frac{i!(n-3)!}{(i+n-2)!}.$$

□

Вычисление 2. Пусть в последовательности $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ значения $p_1, p_2, \ldots, p_s$ являются однократными и не превосходят c, а все остальные значения больше чем c. Пусть $n > s$ и $s < m \leqslant n$. Тогда

$$\int_0^1 x^i \varrho_{c,n,m}(x)dx = \frac{\sum\limits_{k=1}^{s}\frac{(c-p_k)^{n-2}}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^n(p_j-p_k)}\left(\frac{c-p_k}{p_m-p_k}\right)^i}{\sum\limits_{k=1}^{s}\frac{(c-p_k)^{n-2}}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^n(p_j-p_k)}}\frac{i!(n-2)!}{(i+n-2)!}.$$

Решение. В силу (2) и (4) можем записать:

$$\varrho_{c,n,m}(x) = \frac{(n-2)\sum\limits_{k=1}^{s}(p_m-p_k)\frac{\left((c-p_k-(p_m-p_k)x\right)_+^{n-3}}{\prod_{\substack{j=1..n\\j\neq k}}(p_j-p_k)}}{\sum\limits_{k=1}^{s}\frac{(c-p_k)^{n-2}}{\prod_{\substack{j=1..n\\j\neq k}}(p_j-p_k)}}.$$

В суммах (как в числителе, так и в знаменателе) мы ограничились лишь s слагаемыми, поскольку остальные слагаемые (при $k > s$) равны нулю.

Далее, заматим, что если $p_k < c < p_m$, то

$$(n-2)(p_m-p_k)\int_0^1 x^i\left(c-p_k-(p_m-p_k)x\right)_+^{n-3} = (c-p_k)^{n-2}\left(\tfrac{c-p_k}{p_m-p_k}\right)^i\tfrac{i!(n-2)!}{(i+n-2)!}.$$

Это завершает доказательство. □

Вычисление 3. Пусть $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1$ и $p_k \geqslant 4$ при $k > 4$ (как, например, для целочисленной решётки). Тогда при $1 \leqslant c \leqslant 4$, $n > 4$ и $4 < m \leqslant n$ справедливо равенство:

$$\int_0^1 x^i \varrho_{c,n,m}(x)dx = \frac{\frac{d^3}{d\xi^3}\left(\frac{(c-\xi)^{n-2}}{\prod_{j=5}^n(p_j-\xi)}\left(\frac{c-\xi}{p_m-\xi}\right)^i\right)\Bigg|_{\xi=1}}{\frac{d^3}{d\xi^3}\left(\frac{(c-\xi)^{n-2}}{\prod_{j=5}^n(p_j-\xi)}\right)\Bigg|_{\xi=1}}\frac{i!(n-2)!}{(i+n-2)!}.$$

Решение. Эта формула получается предельным переходом из предыдущего вычисления с использованием (3). □

Справедливо тождество:

$$f''' = f\big(((\log f)')^3 + 3(\log f)'(\log f)'' + (\log f)'''\big).$$

Вычисление 4. В условиях вычисления 3 имеем:

$$\int_0^1 x^i \varrho_{c,n,m}(x)dx = \left(\frac{c-1}{p_m-1}\right)^i \frac{i!(n-2)!}{(i+n-2)!} R_{c,n,m},$$

где число $R_{c,n,m}$ определено формулой:

$$R_{c,n,m} = \frac{\big(\frac{2-n-i}{c-1} + \sum\limits_{j=5}^{n} \frac{1}{p_j-1} + \frac{i}{p_m-1}\big)^3 + 3\big(\frac{2-n-i}{(c-1)^2} + \sum\limits_{j=5}^{n} \frac{1}{(p_j-1)^2} + \frac{i}{(p_m-1)^2}\big)\big(\frac{2-n-i}{c-1} + \sum\limits_{j=5}^{n} \frac{1}{p_j-1} + \frac{i}{p_m-1}\big) + 2\big(\frac{2-n-i}{(c-1)^3} + \sum\limits_{j=5}^{n} \frac{1}{(p_j-1)^3} + \frac{i}{(p_m-1)^3}\big)}{\big(\frac{2-n}{c-1} + \sum\limits_{j=5}^{n} \frac{1}{p_j-1}\big)^3 + 3\big(\frac{2-n}{(c-1)^2} + \sum\limits_{j=5}^{n} \frac{1}{(p_j-1)^2}\big)\big(\frac{2-n}{c-1} + \sum\limits_{j=5}^{n} \frac{1}{p_j-1}\big) + 2\big(\frac{2-n}{(c-1)^3} + \sum\limits_{j=5}^{n} \frac{1}{(p_j-1)^3}\big)}$$

или, что тоже самое:

$$R_{c,n,m} = \frac{\big(\frac{n+i-2}{c-1} - \sum\limits_{j=5}^{n} \frac{1}{p_j-1} - \frac{i}{p_m-1}\big)^3 - 3\big(\frac{n+i-2}{(c-1)^2} - \sum\limits_{j=5}^{n} \frac{1}{(p_j-1)^2} - \frac{i}{(p_m-1)^2}\big)\big(\frac{n+i-2}{c-1} - \sum\limits_{j=5}^{n} \frac{1}{p_j-1} - \frac{i}{p_m-1}\big) + 2\big(\frac{n+i-2}{(c-1)^3} - \sum\limits_{j=5}^{n} \frac{1}{(p_j-1)^3} - \frac{i}{(p_m-1)^3}\big)}{\big(\frac{n-2}{c-1} - \sum\limits_{j=5}^{n} \frac{1}{p_j-1}\big)^3 - 3\big(\frac{n-2}{(c-1)^2} - \sum\limits_{j=5}^{n} \frac{1}{(p_j-1)^2}\big)\big(\frac{n-2}{c-1} - \sum\limits_{j=5}^{n} \frac{1}{p_j-1}\big) + 2\big(\frac{n-2}{(c-1)^3} - \sum\limits_{j=5}^{n} \frac{1}{(p_j-1)^3}\big)}$$

При фиксированых c и i имеется равномерная сходимость:

$$R_{c,n,m} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{равномерно по } m} 1\,.$$