Маргинальное распределение равномерного распределения
Андрей Бирюк. Препринт, 2005

About marginal density distribution
Andrei Biryuk. Preprint, 2005

English summary: This manuscript is a development (2003-2005) of [2] related in part to the forthcoming paper [1]. Though [2] can now be view as part of this manuscript, I still recommend [2] as an introduction to the topic. I make this text mostly for my own convenience, however I will be more than happy if you find it useful.

December 2005

[1] Biryuk A. On Invariant Measures of the 2D Euler Equation. J. Stat. Physics. (to appear)
[2] Biryuk A. Distribution of the component of the uniform distribution in a polyhedron. Preprint 2003. (Распределение компонеты равномерного распределения в полиэдре)

После того как рукопись [1] была принята для публикации в журнал статистической физики, я собрал материал, который я наработал 2003-2005 годах. Часть в вошло в статью, другая, например, бесконечномерный случай, пока находится в стадии разработки. Я выкладываю мои вычисления в свободный доступ с двумя очевидными целями. Во-первых это может быть кому-то полезно, и как следствие, во-вторых, я надеюсь привлечь заинтересованых физиков и математиков к сотрудничеству. Препринт [2], лишенный некоторых технических деталей может быть более полезным для первого чтения.

Лемма. (Двумерная формула Ньютона-Лейбница.) *Пусть* $F(x,y)=\int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta)d\xi d\eta$. *Если* f — *непрерывна, то*

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)=f(x,y).$$

Вопрос: На какой класс функций f обобщается эта лемма? Почему не достаточно непрерывности в точке?

Пусть p_1, p_2, ... — произвольная последовательность вещественных чисел. Фиксируем $n\geqslant 2$. Требуем $(1,\dots,1)\not\parallel(p_1,\dots,p_n)$. В $\mathbb{R}^n$ рассмотрим фигуру:

$$\begin{cases} x_1+\dots+x_n\leqslant A,\\ p_1x_1+\dots+p_nx_n\leqslant B,\\ x_k\geqslant 0, \quad \text{для всех } k.\end{cases}$$

Обозначим через $V_{n,\boldsymbol{p}}(A,B)$ — ее n-мерный объём.

$$F_{n,\boldsymbol{p}}(A,B)=\frac{\partial^2}{\partial A\partial B}V_{n,\boldsymbol{p}}(A,B).$$

Заметим, что при $B \geqslant A\max\{0,p_1,\dots,p_n\}$ выполнено

$$V_{n,\boldsymbol{p}}(A,B) = \mathrm{Vol}\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n : x_k\geqslant 0, \sum x_k \leqslant A\} = \tfrac{1}{n!}A^n,$$

аналогично, если все веса p_k положительны ($k = 1\dots n$), то при $B \leqslant A\min\limits_{k=1..n} p_k$ имеем

$$V_{n,\boldsymbol{p}}(A,B) = \mathrm{Vol}\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n : x_k\geqslant 0, \sum p_k x_k \leqslant B\} = \tfrac{1}{n!}\tfrac{B^n}{\prod_{k=1}^n p_k}.$$

Для векторов $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2\in\mathbb{R}^n$ и чисел a,b рассмотрим множество $\big\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n : x_k\geqslant 0, (\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{x}) = a,\ (\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{x}) = b\big\}$. Его $n-2$ мерный лебегов объем обозначим через $S_{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2}(a,b)$. Кроме этого, обозначим $\mathbf{1}^n = (1,\dots,1)$ и $\boldsymbol{p}^n = (p_1,\dots,p_n)$.
Лемма. (Геометрический смысл.) *Справедливо соотношение:*

$$S_{\mathbf{1}^n,\boldsymbol{p}^n}(A,B) = F_{n,\boldsymbol{p}}(A,B)\sqrt{n(p_1^2+\dots+p_n^2)-(p_1+\dots+p_n)^2}. \qquad (1)$$

Доказательство. Зафиксируем в плоскости натянутой на вектора $\mathbf{1}^n = (1,\dots,1)$ и $\boldsymbol{p}^n = (p_1,\dots,p_n)$ произвольный ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Тогда для любой области $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, по теореме Фубини

$$\mathrm{Vol}\big\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n : x_k\geqslant 0, \big((\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_1),(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_2)\big)\in\Omega\big\} = \iint_\Omega S_{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2}(\xi,\eta)d\xi d\eta\,.$$

С другой стороны, по двумерной формуле Ньютона-Лейбница для любой области $\Omega'\subset\mathbb{R}^2$ имеем:

$$\mathrm{Vol}\big\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n : x_k\geqslant 0, \big((\boldsymbol{x},\mathbf{1}^n),(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}^n)\big)\in\Omega'\big\} = \iint_{\Omega'} F_{n,\boldsymbol{p}}(A,B)dAdB\,.$$

Далее, пусть область Ω в координатах ξ,η соответствует области Ω' в координатах A,B. Тогда получаем:

$$\iint_\Omega S_{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2}(\xi,\eta)d\xi d\eta = \iint_{\Omega'} F_{n,\boldsymbol{p}}(A,B)dAdB$$

или, сделав замену координат

$$\iint_\Omega S_{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2}(\xi,\eta)d\xi d\eta = \iint_{\Omega'} S_{\mathbf{1}^n,\boldsymbol{p}^n}(A,B)\,\tfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(A,B)}\,dAdB\,,$$

получаем, что для любой области Ω' выполнено соотношение

$$\iint_{\Omega'} S_{\mathbf{1}^n,\boldsymbol{p}^n}(A,B)\,\tfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(A,B)}\,dAdB = \iint_{\Omega'} F_{n,\boldsymbol{p}}(A,B)dAdB.$$

Заметим, что якобиан $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(A,B)}$ линеного отображения $(\xi,\eta) = \big(\xi(A,B),\eta(A,B)\big)$ равен отношению лебеговой площади единичного квадрата в координатах ξ, η $(=\ 1)$ к площади единичного квадрата в координатах A, B. Последний равен площади параллелограмма натянутого на $\mathbf{1}^n, \boldsymbol{p}^n$

$$= |\mathbf{1}^n||\boldsymbol{p}^n| \sin\angle(\mathbf{1}^n, \boldsymbol{p}^n) = \sqrt{n(p_1^2 + \cdots + p_n^2) - (p_1 + \cdots + p_n)^2}.$$

Произвольность области Ω' доказывает лемму. $\square$

Утверждение 1. $F_{n,\boldsymbol{p}}(A,B) = A^{n-2} F_{n,\boldsymbol{p}}(1, \frac{B}{A})$.

Доказательство. Функция $V(\cdot,\cdot)$ является однородной степени n. Следовательно, её вторая производная является однородной степени $n-2$. $\square$

Утверждение 2. *Функция $y \mapsto F_{n,\boldsymbol{p}}(1,y)$ — неотрицательная, с носителем*

$$\operatorname{supp} F_{n,\boldsymbol{p}}(1,\cdot) = [\min_{k=1..n} p_k\,,\ \max_{k=1..n} p_k],$$

причём

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{n,\boldsymbol{p}}(1,y)dy = \frac{1}{(n-1)!},$$

а если все p_k положительны, то, кроме этого, имеем

$$\int_0^{\infty} F_{n,\boldsymbol{p}}(x,1)dx = \frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{\prod_{k=1}^n p_k}.$$

Доказательство. Утверждение о носителе очевидно. Вычислим интегралы. По двумерной формуле Ньютона-Лейбница

$$\tfrac{1}{n!} = \operatorname{vol}\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : x_k \geqslant 0\,,\ \textstyle\sum x_k \leqslant 1\} = \displaystyle\int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} F_{n,\boldsymbol{p}}(x,y)dydx.$$

Используя свойство однородности, получаем:

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} F_{n,\boldsymbol{p}}(x,y)dydx = \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-2} F_{n,\boldsymbol{p}}(1, \tfrac{y}{x})dydx =$$
$$= \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-1} F_{n,\boldsymbol{p}}(1,\eta)d\eta dx = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} F_{n,\boldsymbol{p}}(1,\eta)d\eta.$$

Первое интегральное соотношение доказано. Второе доказывается аналогично, исходя из соотношения

$$\tfrac{1}{n!}\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} p_k} = \operatorname{vol}\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : x_k \geqslant 0, \textstyle\sum p_k x_k \leqslant 1\} = \displaystyle\int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} F_{n,\boldsymbol{p}}(x,y)dxdy. \quad \square$$

Пусть $n_q = \#\{k \in \{1,\ldots,n\} : p_k = q\}$. Тогда $\sum_q n_q = n$.
Что бы помочь читателю понять формулу в следующей теореме мы отметим тождество:

$$\prod_{\substack{j=1,\ldots,n\\ p_j \neq q}} (p_j - \xi) = \prod_{q' \in \{p_1,\ldots,p_n\}\setminus q} (q' - \xi)^{n_{q'}} \quad \text{(здесь по } n - n_q \text{ множителей).}$$

Обозначение. Определим функции $(\cdot)_+^m$ и $(\cdot)_-^m$ следующим образом

$$(x)_+^m = \begin{cases} x^m,\ x \geqslant 0, \\ 0,\ x < 0, \end{cases} \qquad (x)_-^m = \begin{cases} 0,\ x \geqslant 0, \\ x^m,\ x < 0. \end{cases}$$

Отметим, что $(x)_+^m + (x)_-^m \equiv x^m$.
Теорема. *Для функции $F_{n,\boldsymbol{p}}(1,\cdot)$ справедливо тождество:*

$$F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c) = \frac{1}{(n-2)!} \sum_{q \in \{p_k\}_{k=1}^n} \frac{(-1)^{n_q-1}}{(n_q-1)!} \frac{d^{n_q-1}}{d\xi^{n_q-1}} \left(\frac{\big((c-\xi)_+\big)^{n-2}}{\prod\limits_{\substack{j=1,\dots,n \\ p_j \neq q}} (p_j - \xi)} \right)\Bigg|_{\xi=q}, \tag{2}$$

или, что эквивалентно:

$$F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c) = \frac{1}{(n-2)!} \sum_{\substack{q \in \{p_k\}_{k=1}^n \\ q<c}} \frac{(-1)^{n_q-1}}{(n_q-1)!} \frac{d^{n_q-1}}{d\xi^{n_q-1}} \left(\frac{(c-\xi)^{n-2}}{\prod\limits_{\substack{j=1,\dots,n \\ p_j \neq q}} (p_j - \xi)} \right)\Bigg|_{\xi=q}. \tag{2'}$$

Доказательство. В частном случае, когда все кратности равны 1, то есть, все веса p_k различны, нам надо доказать формулу

$$F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c) = \frac{1}{(n-2)!} \sum_{k=1}^n \frac{\big((c-p_k)_+\big)^{n-2}}{\prod\limits_{\substack{j=1,\dots,n \\ j \neq k}} (p_j - p_k)}. \tag{3}$$

Этим случаем можно и ограничиться, т.к. случай “кратностей” в последовательности $\{p_k\}$ можно получить предельным переходом, используя формулу:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{s=0}^{l-1} (-1)^s \varepsilon^{1-l} \frac{\varphi(x+s\varepsilon)}{s!(l-s-1)!} = \frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!} \varphi^{(l-1)}(x). \tag{4}$$

Доказательство формулы (3) основано на использовании геометрического смысла величины $F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c)$.

Введем обозначения для линейных функционалов:

$$l_{\boldsymbol{1}}(x_1,\dots,x_n) = x_1 + \dots + x_n; \quad l_{\boldsymbol{p}}(x_1,\dots,x_n) = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n.$$

Итак, докажем формулу (3). Без ограничения общности можно считать, что веса $\{p_k\}$ упорядочены: $p_1 < \dots < p_n$. Рассмотирм тетраэдр $\boldsymbol{T}$, образованый пересечением положительного октанта в $\mathbb{R}^n$ с гипер-плоскостью $x_1 + \dots + x_n = 1$. (Тетраэдр $\boldsymbol{T}$ называется стандартным $(n-1)$-мерным тетраэдром. Его объём выражается следующим образом: $\mathrm{vol}^{(n-1)}(\boldsymbol{T}) = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}$.) Вершины тетраэдра $\boldsymbol{T}$ обозначим $P_1,\dots,P_n$ в естественном порядке (в частности, $l_{\boldsymbol{p}}(P_k) = p_k$). На каждой из $\frac{n(n-1)}{2}$ прямых, содержащих рёбра тетраэдра $\boldsymbol{T}$ введем ориентацию (=направление) в соответствии с возрастанием функционала $l_{\boldsymbol{p}}(\cdot)$. Свяжем с кажой из n вершин тетраэдра $\boldsymbol{T}$ положительный $n-1$ мерный октант, лежащий в гиперплоскости $l_{\mathbf{1}}(\cdot)=1$, построенный следующим образом: Для каждой вершины P_k рассмотрим $n-1$ прямую (содержащие ребра тетраэдра $\boldsymbol{T}$ выходящие из вершины P_k); из каждой прямой выделим положительный луч относильно выбранной ориентации (т.е. луч с началом в точке P_k и направленный в сторону возрастания функционала $l_{\boldsymbol{p}}(\cdot)$); Обозначим через O_k выпулкую оболочку этих лучей.

Тогда, обозначая алгебраические сложения и вычетания множеств через $+$ и $-$ (алгебраические = с учетом кратности вхождения точек), получаем:

$$\boldsymbol{T} = O_1 - O_2 + O_3 - O_4 + \cdots + (-1)^{n-1} O_n. \tag{5}$$

Для каждого $k=1,\ldots,n$ рассмотрим функции

$$\varphi_k(c) = \mathrm{vol}^{\mathrm{n}-1}(O_k \cap \{l_{\boldsymbol{p}}(\cdot) \leqslant c\}),$$
$$\psi_k(c) = \mathrm{vol}^{\mathrm{n}-2}(O_k \cap \{l_{\boldsymbol{p}}(\cdot) = c\}).$$

Отметим, что величины $\varphi_k(c)$ и $\psi_k(c)$ конечны, поскольку множества $O_k \cap \{l_{\boldsymbol{p}}(\cdot) \leqslant c\}$ и $O_k \cap \{l_{\boldsymbol{p}}(\cdot) = c\}$ ограничены (по построению множеств O_k). Кроме этого, отметим, что $\varphi_k(c)$ и $\psi_k(c)$ равны нулю при $c \leqslant p_k$.

В силу (5) и (1) получаем

$$F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\psi_k(c)}{\sqrt{n(p_1^2+\cdots+p_n^2)-(p_1+\cdots+p_n)^2}}. \tag{6}$$

Кроме этого, имеется соотношение:

$$\varphi_k(c) = \frac{1}{n-1}\psi_k(c)\,\mathrm{dist}(P_k, \{l_{\mathbf{1}}=1, l_{\boldsymbol{p}}=c\}), \tag{7}$$

причём:

$$\mathrm{dist}(P_k, \{l_{\mathbf{1}}=1, l_{\boldsymbol{p}}=c\}) = \frac{|c-p_k|}{\sqrt{(p_1^2+\cdots+p_n^2)-\frac{1}{n}(p_1+\cdots+p_n)^2}}. \tag{8}$$

Что бы найти $\psi_k(\cdot)$, нам остается вычислить $\varphi_k(c)$. Считаем, что $c > p_k$. Прямая проходящая через точки P_k и P_j, $j \neq k$ параметрически может быть задана следующим образом:

$$t \mapsto P_k + t(P_j - P_k).$$

Найдем t_{kj} из соотношения

$$l_{\boldsymbol{p}}(P_k + t_{kj}(P_j-P_k)) = c \quad\Leftrightarrow\quad p_k + t_{kj}(p_j-p_k) = c \quad\Rightarrow\quad t_{kj} = \frac{c-p_k}{p_j-p_k}.$$

Так как $t=0$ соответствует точке P_k, а $t=1$ соответствует точке P_j, то точка на прямой (P_k,P_j), для которой $l_p = c$, удалена от P_k на расстояние

$|t_{kj}|\operatorname{dist}(P_k, P_j)$. Поэтому

$$\varphi_k(c) = \mathrm{vol}^{\mathrm{n}-1}(\boldsymbol{T}) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |t_{kj}| \quad \Rightarrow \quad (-1)^{k-1}\varphi_k(c) = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{(c-p_k)_+}{p_j - p_k}. \tag{9}$$

Если теперь выразить $\psi_k(c)$ из (7) учитывая (8) и (9), и подставить в формулу (6), то мы получим (3). Теорема доказана. $\square$

Обозначение. Если $\boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_n)$ — вектор размерности n, то $\boldsymbol{p}'_m$ — вектор размерности $n-1$, полученный "выкидыванием" $p_m \quad (1 \leqslant m \leqslant n)$.
Обозначение. Для $x \in [0,1)$ положим:

$$\varrho_{c,n,m}(x) = \frac{F_{n-1,\boldsymbol{p}'_m}(1-x, c-p_m x)}{F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c)} = \frac{(1-x)^{n-3} F_{n-1,\boldsymbol{p}'_m}(1, \frac{c-p_m x}{1-x})}{F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c)}. \tag{10}$$

Для $x \notin [0,1)$ положим $\varrho_{c,n,m}(x) = 0$.

Утверждение 3. $\displaystyle\int_0^1 \varrho_{c,n,m}(x)dx = 1.$

Доказательство. Мы начнем с простого вспомогательного утверждения. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ дана ℓ-мерная гиперплоскость L ($\ell \leqslant n$) и ограниченное множество S в ней. Пусть, кроме этого, задан вектор $\boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^n$. Положим $S_\xi = S \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{l}) = \xi\}$. Тогда*

$$\mathrm{vol}^{\ell}(S) = \frac{1}{\varkappa} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{vol}^{\ell-1}(S_\xi) d\xi,$$

где $\varkappa$ — длина проекции вектора $\boldsymbol{l}$ на гиперплоскость L.
Возьмем в качестве L гиперполоскость $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : (\boldsymbol{1}^n, \boldsymbol{x}) = 1\,, (\boldsymbol{p}^n, \boldsymbol{x}) = c\}$. В качестве S возьмем подмножество L высекаемое положительным октантом. В качестве $\boldsymbol{l}$ возьмем m-тый базисный вектор пространства $\mathbb{R}^n$. Из леммы о геометрическом смысле находим:

$$\mathrm{vol}^{\mathrm{n}-2}(S) = \kappa_1\, F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c),$$
$$\mathrm{vol}^{\mathrm{n}-3}(S_\xi) = \begin{cases} \kappa_2\, F_{n-1,\boldsymbol{p}'_m}(1-\xi, c-p_m\xi), & \xi \in [0,1], \\ 0, \quad \text{иначе}, \end{cases}$$

где обозначено:

$$\kappa_1 = \sqrt{n(p_1^2 + \dots + p_n^2) - (p_1 + \dots + p_n)^2}, \quad \kappa_2 = \sqrt{(n-1)\sum_{k\neq m} p_k^2 - \big(\sum_{k\neq m} p_k\big)^2}.$$

Найдем длину проекции вектора $\boldsymbol{l}$ на гиперплоскость ортогональную векторам $\boldsymbol{1}^n$ и $\boldsymbol{p}^n$. Причем вместо вектора $\boldsymbol{p}^n$ лучше взять вектрор $\bar{\boldsymbol{p}}^n$, где $\bar{p}_k = p_k - \frac{1}{n}\sum p_j$.

$$\varkappa^2 = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\left(p_m - \frac{\sum_{k=1}^n p_k}{n}\right)^2}{\sum_{j=1}^n \left(p_j - \frac{\sum_{k=1}^n p_k}{n}\right)^2}.$$

Остается заметить, что $\varkappa = \kappa_2/\kappa_1$. $\square$

Следствие:

$$1^\circ\ \varrho_{p_m,n,m}(x) = (n-2)(1-x)^{(n-3)}, \qquad 2^\circ\ \int_0^1 x^i \varrho_{p_m,n,m}(x)dx = \frac{i!(n-2)!}{(i+n-2)!}.$$

Вычисление 1. *Пусть в последовательности $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ значение p_1 является минимальным и отделенным от всех остальных значений последовательности. То есть, существует $\sigma > p_1$ т.ч. $\forall\ k \geqslant 2$ выполнено $\sigma \leqslant p_k$. Тогда при $p_1 \leqslant c \leqslant \sigma$, $m \geqslant 2$ и $m \leqslant n$ выполнено:*

$$\int_0^\infty x^i \varrho_{c,n,m}(x)dx = \left(\frac{c-p_1}{p_m-p_1}\right)^i \frac{i!(n-2)!}{(i+n-2)!}.$$

Решение. (Возможно, проще понять решение более общего вычисления 2.)

Пусть $p_1 \leqslant c \leqslant \sigma$, $m \geqslant 2$, $m \leqslant n$, $x \geqslant 0$. Тогда:

$$\varrho_{c,n,m}(x) = \frac{F_{n-1,\boldsymbol{p}'_m}(1-x, c-p_m x)}{F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c)} = \frac{(1-x)^{n-3}F_{n-1,\boldsymbol{p}'_m}(1, \frac{c-p_m x}{1-x})}{F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\frac{(1-x)^{n-3}}{(n-3)!}\frac{\left(\frac{c-p_m x}{1-x}-p_1\right)^{(n-3)}}{\prod_{j=2,\, j\neq m}^{n}(p_j-p_1)}}{\frac{1}{(n-2)!}\frac{(c-p_1)^{n-2}}{\prod_{j=2}^{n}(p_j-p_1)}} \\ 0, \text{ при } x > (c-p_1)/(p_m-p_1) \end{cases} = \begin{cases} (n-2)\left(1-\dfrac{p_m-p_1}{c-p_1}x\right)^{n-3}\dfrac{p_m-p_1}{c-p_1} \\ 0, \text{ при } x > (c-p_1)/(p_m-p_1) \end{cases}$$

$$\int_0^\infty x^i \varrho_{c,n,m}(x)dx = \int_0^{\frac{c-p_1}{p_m-p_1}} x^i (n-2)\left(1-\frac{p_m-p_1}{c-p_1}x\right)^{n-3}\frac{p_m-p_1}{c-p_1}dx =$$
$$(n-2)\left(\frac{c-p_1}{p_m-p_1}\right)^i \int_0^1 z^i(1-z)^{n-3}dz = (n-2)\left(\frac{c-p_1}{p_m-p_1}\right)^i \frac{i!(n-3)!}{(i+n-2)!}.$$

$\square$

Вычисление 2. *Пусть в последовательности $\{p_k\}_{k=1}^{n}$ все значения являются однократными. Пусть $1 \leqslant m \leqslant n$ и $\min_{k=1..n} p_k \leqslant c \leqslant \max_{k=1..n} p_k$. Тогда при $c \leqslant p_m$ справедлива формула:*

$$\int_0^1 x^i \varrho_{c,n,m}(x)dx = \frac{\sum\limits_{k=1..n\,:\,p_k<c} \frac{(c-p_k)^{n-2}}{\prod_{j=1,\, j\neq k}^{n}(p_j-p_k)}\left(\frac{c-p_k}{p_m-p_k}\right)^i}{\sum\limits_{k=1..n\,:\,p_k<c}\frac{(c-p_k)^{n-2}}{\prod_{j=1,\, j\neq k}^{n}(p_j-p_k)}}\,\frac{i!(n-2)!}{(i+n-2)!}, \tag{11}$$

а при $c \geqslant p_m$ выполнено

$$\int_0^1 x^i \varrho_{c,n,m}(x)dx = \frac{\displaystyle\sum_{k=1..n\,:\,p_k>c} \frac{(c-p_k)^{n-2}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n (p_j-p_k)} \left(\frac{c-p_k}{p_m-p_k}\right)^i}{\displaystyle\sum_{k=1..n\,:\,p_k>c} \frac{(c-p_k)^{n-2}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n (p_j-p_k)}} \, \frac{i!(n-2)!}{(i+n-2)!}\,. \tag{11'}$$

Решение. Рассмотрим случай $c \leqslant p_m$. Без ограничения общности, будем считать, что $p_1, \dots, p_s$ меньше чем c, а $p_{s+1}, \dots, p_n$ не меньше чем c.

В силу (3) и (10) можем записать:

$$\varrho_{c,n,m}(x) = \frac{\displaystyle(n-2)\sum_{k=1}^{s}(p_m-p_k)\frac{\big((c-p_k-(p_m-p_k)x\big)_+^{n-3}}{\prod_{\substack{j=1..n\\ j\neq k}} (p_j-p_k)}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{s}\frac{(c-p_k)^{n-2}}{\prod_{\substack{j=1..n\\ j\neq k}} (p_j-p_k)}}\,. \tag{12}$$

В суммах (как в числителе, так и в знаменателе) мы ограничились лишь s слагаемыми, поскольку остальные слагаемые (при $k > s$) равны нулю.

Далее, заметим, что если $p_k < c < p_m$, то

$$(n-2)(p_m-p_k)\int_0^1 x^i \big(c-p_k-(p_m-p_k)x\big)_+^{n-3} dx = (c-p_k)^{n-2}\left(\tfrac{c-p_k}{p_m-p_k}\right)^i \tfrac{i!(n-2)!}{(i+n-2)!}.$$

Это завершает доказательство при $c \leqslant p_m$.

В случае $c \geqslant p_m$ воспользуемся представлением

$$F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c) = \frac{-1}{(n-2)!}\sum_{k=1}^{n}\frac{\big((c-p_k)_-\big)^{n-2}}{\prod\limits_{\substack{j=1,\dots,n\\ j\neq k}} (p_j-p_k)} \tag{3'}$$

и повторим рассуждения.

Формула (3′) следует из (3) и полиномиального по c тождества:

$$\frac{1}{(n-2)!}\sum_{k=1}^{n}\frac{(c-p_k)^{n-2}}{\prod\limits_{\substack{j=1,\dots,n\\ j\neq k}} (p_j-p_k)} \equiv 0,$$

которое, в свою очередь, следует из того что $F_{n,\boldsymbol{p}}(1,c) \equiv 0$ при $c > \max p_k$. $\square$

Замечание. При $c \leqslant p_m$ (соответственно, при $c \geqslant p_m$) можно не требовать однократности последовательности $\{p_k\}$ при $p_k \geqslant c$ (соответственно, при $p_k \leqslant c$).

Вычисление 3. *Пусть $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1$ и $p_k \geqslant 2$ при $k > 4$ (как, например, для целочисленной решётки). Тогда при $1 \leqslant c \leqslant 2$, $n > 4$ и*

$4 < m \leqslant n$ *справедливо равенство:*

$$\int_0^1 x^i \varrho_{c,n,m}(x)dx = \frac{\left.\frac{d^3}{d\xi^3}\left(\frac{(c-\xi)^{n-2}}{\prod_{j=5}^n (p_j-\xi)}\left(\frac{c-\xi}{p_m-\xi}\right)^i\right)\right|_{\xi=1}}{\left.\frac{d^3}{d\xi^3}\left(\frac{(c-\xi)^{n-2}}{\prod_{j=5}^n (p_j-\xi)}\right)\right|_{\xi=1}} \frac{i!(n-2)!}{(i+n-2)!}\,.$$

Решение. Эта формула получается предельным переходом из предыдущего вычисления с использованием (4). □

Справедливо тождество:

$$f''' = f\big(((\log f)')^3 + 3(\log f)'(\log f)'' + (\log f)'''\big).$$

Вычисление 4. В условиях вычисления 3 имеем:

$$\int_0^1 x^i \varrho_{c,n,m}(x)dx = \left(\frac{c-1}{p_m-1}\right)^i \frac{i!(n-2)!}{(i+n-2)!} R_{c,n,m},$$

где число $R_{c,n,m}$ определено формулой:

$$R_{c,n,m} = \frac{\left(\frac{2-n-i}{c-1} + \sum\limits_{j=5}^n \frac{1}{p_j-1} + \frac{i}{p_m-1}\right)^3 + 3\left(\frac{2-n-i}{(c-1)^2} + \sum\limits_{j=5}^n \frac{1}{(p_j-1)^2} + \frac{i}{(p_m-1)^2}\right)\left(\frac{2-n-i}{c-1} + \sum\limits_{j=5}^n \frac{1}{p_j-1} + \frac{i}{p_m-1}\right) + 2\left(\frac{2-n-i}{(c-1)^3} + \sum\limits_{j=5}^n \frac{1}{(p_j-1)^3} + \frac{i}{(p_m-1)^3}\right)}{\left(\frac{2-n}{c-1} + \sum\limits_{j=5}^n \frac{1}{p_j-1}\right)^3 + 3\left(\frac{2-n}{(c-1)^2} + \sum\limits_{j=5}^n \frac{1}{(p_j-1)^2}\right)\left(\frac{2-n}{c-1} + \sum\limits_{j=5}^n \frac{1}{p_j-1}\right) + 2\left(\frac{2-n}{(c-1)^3} + \sum\limits_{j=5}^n \frac{1}{(p_j-1)^3}\right)}$$

или, что тоже самое:

$$R_{c,n,m} = \frac{\left(\frac{n+i-2}{c-1} - \sum\limits_{j=5}^n \frac{1}{p_j-1} - \frac{i}{p_m-1}\right)^3 - 3\left(\frac{n+i-2}{(c-1)^2} - \sum\limits_{j=5}^n \frac{1}{(p_j-1)^2} - \frac{i}{(p_m-1)^2}\right)\left(\frac{n+i-2}{c-1} - \sum\limits_{j=5}^n \frac{1}{p_j-1} - \frac{i}{p_m-1}\right) + 2\left(\frac{n+i-2}{(c-1)^3} - \sum\limits_{j=5}^n \frac{1}{(p_j-1)^3} - \frac{i}{(p_m-1)^3}\right)}{\left(\frac{n-2}{c-1} - \sum\limits_{j=5}^n \frac{1}{p_j-1}\right)^3 - 3\left(\frac{n-2}{(c-1)^2} - \sum\limits_{j=5}^n \frac{1}{(p_j-1)^2}\right)\left(\frac{n-2}{c-1} - \sum\limits_{j=5}^n \frac{1}{p_j-1}\right) + 2\left(\frac{n-2}{(c-1)^3} - \sum\limits_{j=5}^n \frac{1}{(p_j-1)^3}\right)}$$

При фиксированых c и i имеется равномерная сходимость:

$$R_{c,n,m} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{равномерно по } m} 1\,.$$

Утверждение. *Пусть последовательность $\{p_k\}$ и число c обладают свойством, что для некоторого положительного ε лишь не более чем конечное число членов последовательности $\{p_k\}$ меньше чем $c+\varepsilon$. Пусть $p_1 \leqslant p_k$ для всех k. Тогда*

$$n^i(p_m-p_1)^i \int_0^1 x^i \rho_{c,n,m}(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{\textit{равномерно по } m: p_m > c} i!(c-p_1)^i.$$

Доказательство. Обозначим

$$W_q^{(s)} = \frac{(-1)^s}{s!}\frac{d^s}{d\xi^s}\left(\frac{(c-\xi)^{n-2}}{\prod_{j=1..n:p_j\neq q}(p_j-\xi)}\Big(\frac{c-\xi}{p_m-\xi}\Big)^i\right)\Bigg|_{\xi=q},$$

аналогично,

$$w_q^{(s)} = \frac{(-1)^s}{s!}\frac{d^s}{d\xi^s}\left(\frac{(c-\xi)^{n-2}}{\prod_{j=1..n:p_j\neq q}(p_j-\xi)}\right)\Bigg|_{\xi=q}.$$

Величины $W_q^{(s)}$ и $w_q^{(s)}$ зависят также от c, n, m и последовательности $\{p_k\}$, однако мы не отражаем этого в обозначении, что бы избежать громоздкости. Используя (11) и (4), получаем:

$$\int_0^1 x^i\rho_{c,n,m}(x)dx = \frac{\sum_{q\in\cup_{p_k<c}\{p_k\}} W_q^{(n_q-1)}}{\sum_{q\in\cup_{p_k<c}\{p_k\}} w_q^{(n_q-1)}}\frac{i!(n-2)!}{(i+n-2)!}. \tag{13}$$

Доказательство следует из того, что при $q_1<q_2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_{q_2}^{(n_{q_2}-1)}}{W_{q_1}^{(n_{q_1}-1)}} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{w_{q_2}^{(n_{q_2}-1)}}{w_{q_1}^{(n_{q_1}-1)}} = 0.$$

То есть вклад в предел дают лишь первые члены. Кроме этого,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_q^{(n_q-1)}}{w_q^{(n_q-1)}} = \left(\frac{c-q}{p_m-q}\right)^i.$$

Нам это свойство понадобится при $q=p_1$, поскольку вклад дают лишь первые члены. утверждение доказано. □

Докажем, что при "не очень больших" c величина $\int_0^1 x\rho_{c,n,m}(x)dx$ хорошо аппроксимируется величиной $\frac{c-p_1}{(m-p_1)(n-1)}$.

Утверждение. Пусть $p_k=k$. Тогда $\forall\,\varepsilon>0$ существуют $N>1$, $K>1$, такие, что $\forall\, n>N$, $\forall m\in[2,\dots,n]$, и для любого $c>1$ удовлетворяющего неравенству

$$c<\min\{m,\frac{n}{K\log n}\}$$

выполнено

$$\left|\int_0^1 x\rho_{c,n,m}(x)dx\frac{(m-1)(n-1)}{c-1}-1\right|<\frac{\varepsilon}{n}.$$

Доказательство. Без ограничения общности, считаем, что $\varepsilon<1/3$.

Поскольку $c<m$, то вычисление 2 нам дает следующее выражение (ср. (13)):

$$\int_0^1 x\rho_{c,n,m}(x)dx = \frac{W_1+W_2+W_3+\cdots+W_{[c]}}{w_1+w_2+w_3+\cdots+w_{[c]}}\frac{1}{n-1}$$

где

$$W_k = (-1)^{k-1}\frac{(c-k)^{n-2}}{(k-1)!(n-k)!}\,\frac{c-k}{m-k}\,, \qquad w_k = (-1)^{k-1}\frac{(c-k)^{n-2}}{(k-1)!(n-k)!}.$$

Идея доказательства состоит в том, что при условии $c < \frac{n}{K\log n}$ слагаемые W_2, W_3,… и w_2, w_3,… будут пренебрежимо малы при $n \to \infty$ по сравнению с W_1 и w_1 соответственно. Кроме этого

$$\frac{W_1}{w_1} = \frac{c-1}{m-1}. \tag{14}$$

(замечение. В случае наличия кратности в p_1 это соотношение заменится на $\lim_{n\to\infty}\frac{W_1}{w_1} = \frac{c-p_1}{m-p_1}$, причём, скорость сходимости оценивается как $\frac{const}{n}$. см. вычисление 4.)

Заметим, что

$$\frac{W_2}{W_1} > \frac{W_3}{W_2} > \frac{W_4}{W_3} > \cdots$$

и аналогичная цепочка неравенств справедлива для w. Кроме этого из условия $c < m$ следует:

$$\frac{W_2}{W_1} < \frac{w_2}{w_1}.$$

Поэтому, для "обеспечения пренебрежимой малости" нам достаточно выбрать N и K такими, что бы при условии

$$n > N \qquad c < \min\{m, \frac{n}{K\log n}\}$$

выполнянось

$$\frac{w_2}{w_1} < \frac{\varepsilon}{10n}.$$

Это равносильно неравенству

$$(n-1)\left(\tfrac{c-2}{c-1}\right)^{n-2} < \tfrac{\varepsilon}{10n}.$$

Достаточно взять такие K и N, что бы выполнялось неравенство

$$\left(\tfrac{c-2}{c-1}\right)^{n-2} < \tfrac{\varepsilon}{10n^2}. \tag{15}$$

Тогда $\frac{W_1+W_2+W_3+\cdots}{w_1+w_2+w_3+\cdots}$ будет "мало отличаться" от $\frac{W_1}{w_1}$, после чего равенство (14) завершит доказательство. Неравенство (15) эквивалентно

$$(n-2)\log\left(\tfrac{c-2}{c-1}\right) < \log(\varepsilon/10) - 2\log n.$$

Поскольку $\log(\frac{c-2}{c-1}) < -\frac{1}{c-1}$, то нам достаточно подобрать K и N, что бы выполнялось

$$-\tfrac{n-2}{c-1} < \log(\varepsilon/10) - 2\log n \quad \Leftrightarrow \quad c < \frac{n-2}{2\log n - \log(\varepsilon/10)} + 1\,.$$

Утверждение доказано. $\square$